#### שאלה 1:

יהיו אזי קיימים כך שמתקיים ע"פ הנתון באופן יחיד.

נגדיר מכפלה פנימית באופן הבא:

כלומר

נראה כי תכונות המכפלה הפנימית מתקיימות:

1. **לינאריות משמאל:** צ"ל   
   **הסבר המעברים:**
   1. מהגדרת סכום ישר מתקיים .
   2. קומוטטיביות, שינוי סדר המחוברים
   3. מהגדרת המכפלה הפנימית:
   4. מלינאריות משמאל של
   5. קומוטטיביות, שינוי סדר המחוברים
   6. מהגדרת המכפלה הפנימית:
2. צ"ל

**הסבר המעברים:**

* 1. מהגדרת סכום ישר מתקיים .
  2. דיסטריביוטיביות, פתיחת סוגריים
  3. מהגדרת המכפלה הפנימית:
  4. המכפלות הפנימיות מקיימות תכונה זו
  5. הוצאת גורם משותף
  6. מהגדרת המכפלה הפנימית:

1. **הרמיטיות:** צ"ל

**הסבר המעברים:**

* 1. מהגדרת סכום ישר מתקיים .
  2. מהגדרת המכפלה הפנימית:
  3. המכפלות הפנימיות מקיימות את תכונת ההרמיטיות
  4. מהגדרת המכפלה הפנימית:

1. **אי-שליליות:** צ"ל   
   **הסבר המעברים:**
2. מהגדרת סכום ישר מתקיים .
3. מהגדרת המכפלה הפנימית:
4. המכפלות הפנימיות מקיימות
5. צ"ל   
   **כיוון 1:** נתון לכן

המכפלות הפנימיות מקיימות תכונה זו לכן לכן .

**כיוון 2:** נתון , לכן , לכן לכן

הוכחנו כי המכפלה הפנימית שהגדרנו היא אכן מכפלה פנימית.

נראה כי היא מקיימת את 2 התנאים הדרושים:

1. מהגדרת המכפלה הפנימית, לכל מתקיים:
2. יהיו אזי מתקיים:  
   כלומר, לכל מתקיים , כלומר , כלומר .

נוכיח כעת **יחידות:**

נניח בשלילה כי קיימת מכפלה פנימית נוספת , אזי מתקיים:

**הסבר המעברים:**

1. מהגדרת סכום ישר מתקיים .
2. מלינאריות של מכפלה פנימית
3. המכפלה הפנימית מקיימת
4. המכפלה הפנימית מקיימת עבור
5. מהגדרת המכפלה הפנימית:

קיבלנו כי המכפלה הפנימית **יחידה**.

#### שאלה 2:

יהיו וקטורים כך שמתקיים .

**סעיף א':**

1. **לינאריות משמאל:** צ"ל
2. צ"ל
3. **הרמיטיות:** צ"ל
4. **אי-שליליות:** צ"ל
5. צ"ל   
   **כיוון 1:** נתון אזי

**כיוון 2:** נתון , כלומר:

כל אחד מהאיברים אי-שלילי, לכן אם סכומם 0 אזי כולם 0, לכן ולכן .

**סעיף ב':**

יהי כך שמתקיים , נדרש:

כלומר .

בנוסף נדרש , כלומר:

כלומר ומכאן ,, כלומר או .

#### שאלה 3:

נתון כי ממ"פ. נסמן ב- את הבסיס הסטנדרטי של , כלומר .

מתהליך ניתן לקבל בסיס אורתונורמלי .

בין כל 2 בסיסים של מ"ו קיימת מטריצת מעבר הפיכה, לכן נסמן ב- את מטריצת המעבר מבסיס לבסיס , כלומר לכל מתקיים:

כמו כן, כל ניתן להביע כקומבינציה לינארית של איברי בסיס :

לכן מתקיים:

**הסבר המעברים:**

1. כל ניתן להביע כקומבינציה לינארית של איברי בסיס .
2. מ"פ, לכן מקיימת את תכונות מ"פ.
3. בסיס אורתונורמלי, לכן לכל וגם .
4. מהגדרת המ"פ הסטנדרטית.
5. אלו המקדמים של בבסיס .
6. מהגדרת מטריצת המעבר מתקיים .
7. כי הוא הבסיס הסטנדרטי.

#### שאלה 4:

מתקיים:

וכן

לכן בסה"כ מתקיים:

#### שאלה 5:

נתון כי בסיס אורתוגונלי, לכן כל הוא קומבינציה לינארית של איברי הבסיס, כלומר קיימים עבור כך שמתקיים .

נסתכל על , מתקיים:

לכן מתקיים: